INPUT: Symmetrie

Mathematik Funktionen 11

Arbeitsauftrag

Erarbeite dir die Regeln zum Untersuchen von Funktionen auf Symmetrie, indem du die folgenden Aufgaben bearbeitest. Wenn du nicht weiter kommst, findest du die Lösungen am Ende des Dokuments.

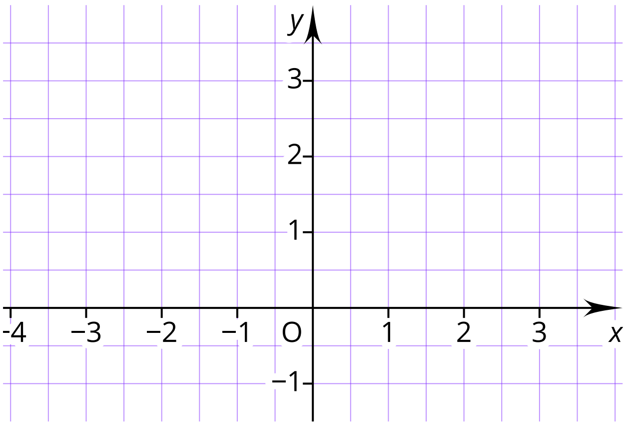
① a) Zeichne die Funktionen. Nutze dazu die Wertetabellen und die Koordinatensysteme.

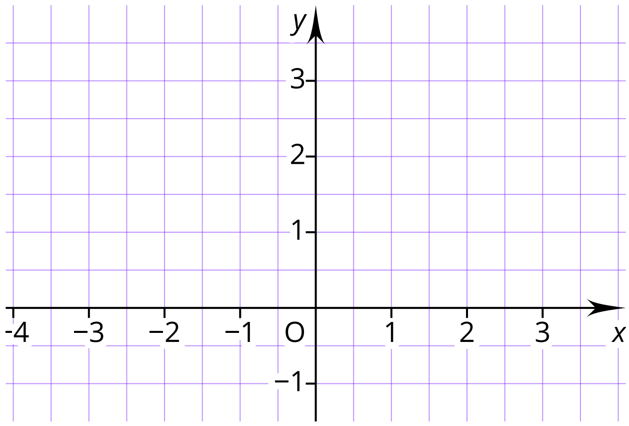
(1) $f(x) = 0{,}5x^2 - 1$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$							

(2) $g(x) = -0{,}125x^4 + x^2 + 1$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$g(x)$							





b) Vergleiche für die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ die Funktionswerte von einer beliebigen Zahl mit dem Funktionswert ihrer Gegenzahl, also zum Beispiel $f(3)$ und $f(-3)$.

c) Beschreibe den Verlauf der Graphen von $f(x)$ und $g(x)$.

Achsensymmetrie

Funktionen, deren Graphen sich an der y-Achse spiegeln lassen, werden als achsensymmetrisch zur y-Achse bezeichnet. Die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ sind Beispiele für achsensymmetrische Funktionen.

INPUT: Symmetrie

Mathematik Funktionen 11

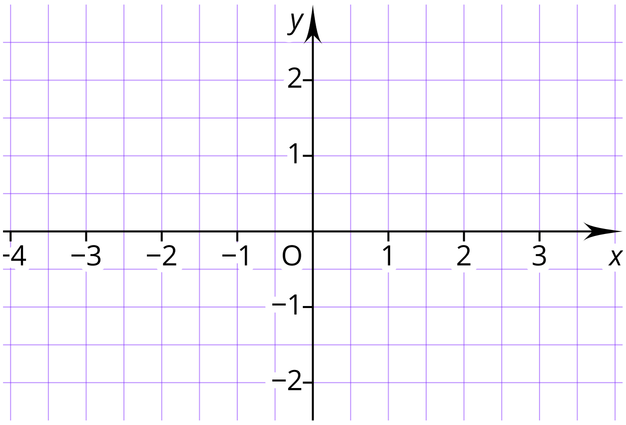
② a) Zeichne die Funktionen. Nutze dazu die Wertetabellen und die Koordinatensysteme.

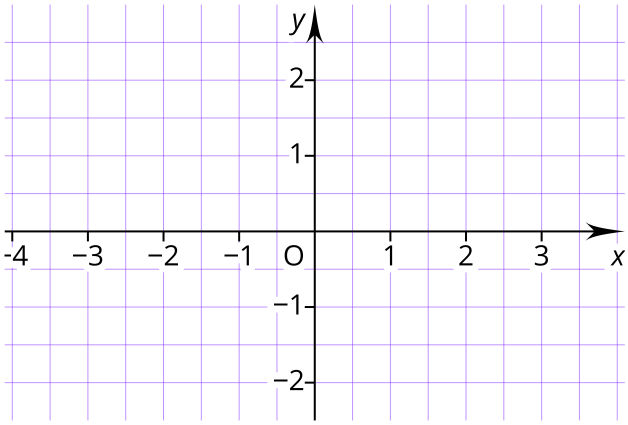
(1) $h(x) = 0{,}5x$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$h(x)$							

(2) $k(x) = \text{-}0{,}125x^3 + 1{,}5x$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$k(x)$							





b) Vergleiche für die Funktionen $h(x)$ und $k(x)$ die Funktionswerte von einer beliebigen Zahl mit dem Funktionswert ihrer Gegenzahl, also zum Beispiel $h(3)$ und $h(\text{-}3)$.

c) Beschreibe den Verlauf der Graphen von $h(x)$ und $k(x)$.

Punktsymmetrie

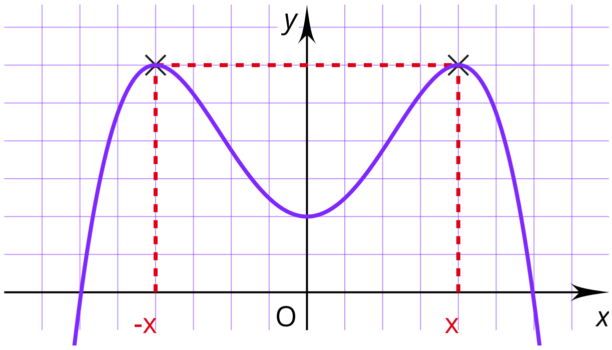
Funktionen, deren Graphen sich im Punkt $P(0|0)$ spiegeln lassen, werden als punktsymmetrisch zum Ursprung bezeichnet. Die Funktionen $h(x)$ und $k(x)$ sind Beispiele für punktsymmetrische Funktionen.

INPUT: Symmetrie

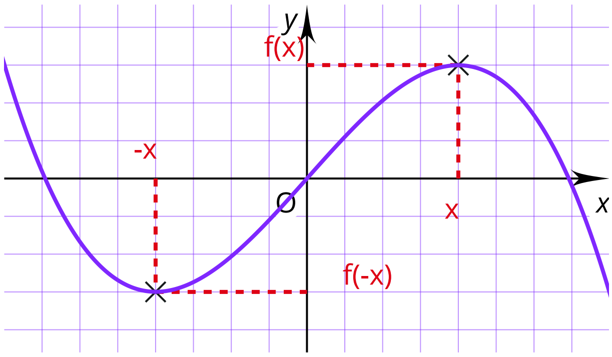
Mathematik Funktionen 11

Wie lässt sich untersuchen, ob eine Funktion symmetrisch ist?

Für alle Funktionen, die achsensymmetrisch zur y-Achse sind, gilt: $f(x) = f(\text{-}x)$.
Um zu prüfen, ob eine Funktion achsensymmetrisch ist, wird für x die Gegenzahl $\text{-}x$ in die Funktionsgleichung eingesetzt und die Funktionsgleichung vereinfacht. Ergibt sich die ursprüngliche Funktionsgleichung $f(x)$ ist die Funktion achsensymmetrisch zur y-Achse.



Für alle Funktionen, die punktsymmetrisch zum Ursprung sind, gilt: $\text{-}f(x) = f(\text{-}x)$.
Um zu prüfen, ob eine Funktion punktsymmetrisch ist, wird für x die Gegenzahl $\text{-}x$ in die Funktionsgleichung eingesetzt und die Funktionsgleichung vereinfacht. Anschließend wird geprüft, ob die Funktion $\text{-}f(x)$ entspricht. Wenn das so ist, ist die Funktion punktsymmetrisch zum Ursprung.



Beispielaufgabe

Untersuche die Funktion auf Symmetrie.

a) $g(x) = \text{-}\ 0{,}125x^4 + x^2 + 1$

b) $k(x) = \text{-}\ 0{,}125x^3 + 1{,}5x$

Rechenweg

a) $g(x) = \text{-}0{,}125x^4 + x^2 + 1$

$g(\text{-}x) = \text{-}0{,}125(\text{-}x)^4 + (\text{-}x)^2 + 1$

$g(\text{-}x) = \text{-}0{,}125x^4 + x^2 + 1$

$g(x) = g(\text{-}x)$

$\Rightarrow$ Die Funktion ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

b) $k(x) = \text{-}0{,}125x^3 + 1{,}5x$

$k(\text{-}x) = \text{-}0{,}125(\text{-}x)^3 + 1{,}5(\text{-}x)$

$k(\text{-}x) = 0{,}125x^3 - 1{,}5x$

$k(x) \neq k(\text{-}x)$

$\text{-}k(x) = 0{,}125x^3 - 1{,}5x$

$\text{-}k(x) = k(\text{-}x)$

$\Rightarrow$ Die Funktion ist punkt-

Das Produkt zweier negativer Zahlen ist positiv, die Minuszeichen heben sich gegenseitig auf:

$(\text{-}x)^2 = (\text{-}x) \cdot (\text{-}x) = x^2$

Daraus folgt, dass bei jeder Potenz mit geradem Exponenten das Ergebnis positiv ist:

$(\text{-}x)^4 = x^4$

$(\text{-}x)^6 = x^6$

Umgekehrt ist die Potenz einer negativen Zahl mit einem ungeraden Exponenten immer negativ:

$(\text{-}x)^3 = \text{-}x^3$

$(\text{-}x)^5 = \text{-}x^5$

$2^3 = 8$

In dieser Aufgabe ist 3 der Exponent und 8 die Potenz.

Wie lässt sich zeigen, dass eine Funktion unsymmetrisch ist?

Natürlich gibt es neben Funktionen, die achsensymmetrisch zur y-Achse oder punktsymmetrisch zum Ursprung sind, auch Funktionen, die keine der beiden Symmetrien aufweisen. Das lässt sich zeigen, indem die beiden Symmetrieformen ausgeschlossen werden.

③ Zeige, dass die Funktion $f(x) = 2x^3 + x^2$ weder achsensymmetrisch zur y-Achse noch punktsymmetrisch zum Ursprung ist.

Tipp

Mit dem in der Beispielaufgabe gezeigtem Vorgehen lassen sich beliebige Funktionen auf Symmetrie untersuchen. Für ganzrationale Funktionen lässt sich jedoch schon auf einen Blick erkennen, ob eine Symmetrie vorliegt:
Besteht das Polynom einer ganzrationalen Funktion nur aus Summanden, deren x-Werte ungerade Exponenten haben, ist die Funktion punktsymmetrisch zum Ursprung:
$f(x) = 2x^{5} - 4x^{3} + 7x^{1}$
Handelt es sich hingegen bei allen Exponenten um gerade Zahlen, ist die Funktion achsensymmetrisch zur y-Achse:
$g(x) = 2x^{4} - 0{,}5x^{2} + 2x^{0}$
Gibt es gerade und ungerade Exponenten, liegt keine der beiden Symmetrien vor:
$h(x) = x^{5} - 6x^{4} + 3x^{1}$

Nicht vergessen: $x = x^1$. Die 1 darf zwar weggelassen werden, ist aber trotzdem ein ungerader Exponent.

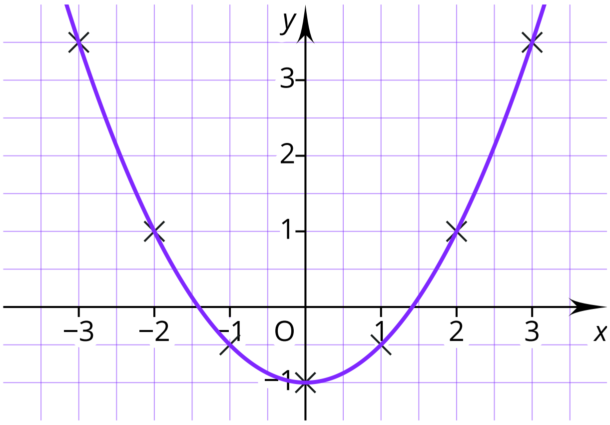
Noch leichter zu übersehen ist der gerade Exponent bei $x^0 = 1$. Enthält eine Funktion ein absolutes Glied, also einen Summanden ohne x, kann die Funktion achsensymmetrisch, aber nicht punktsymmetrisch sein.

Lösung

① a)

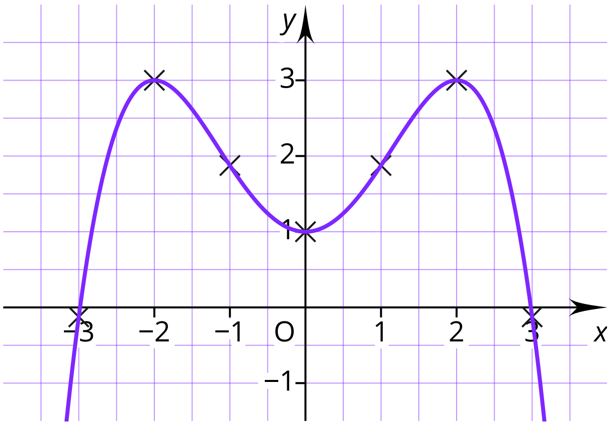
(1)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	3,5	1	-0,5	-1	-0,5	1	3,5



(2)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$g(x)$	$-\frac{1}{8}$	3	$1\frac{7}{8}$	1	$1\frac{7}{8}$	3	$-\frac{1}{8}$



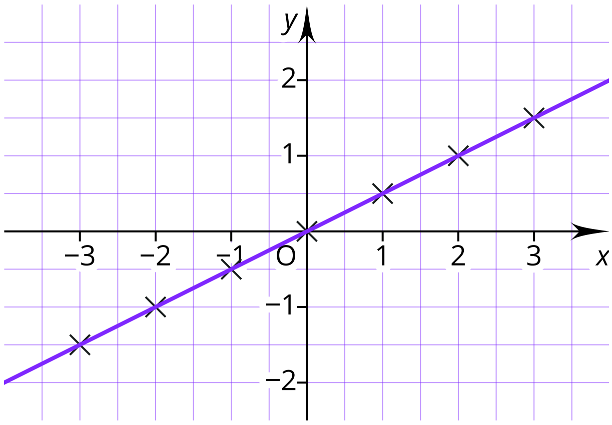
b) Für alle Werte in der Wertetabelle sind die Funktionswerte einer Zahl x und ihrer Gegenzahl -x identisch. Es gilt $f(x) = f(-x)$ sowie $g(x) = g(-x)$.

c) Der Graph von $f(x)$ ist eine nach oben geöffnete, gestauchte Parabel. Sie ist nach unten, aber nicht seitlich verschoben, sodass ihr Scheitelpunkt auf der y-Achse liegt. Der Graph der Funktion $g(x)$ ist nach unten geöffnet. Die Funktion hat zwei Hochpunkte bei $H_1(-2|3)$ und $H_2(2|3)$ sowie einen Tiefpunkt bei $T(0|1)$. Die Funktion ist an der y-Achse gespiegelt.

② a)

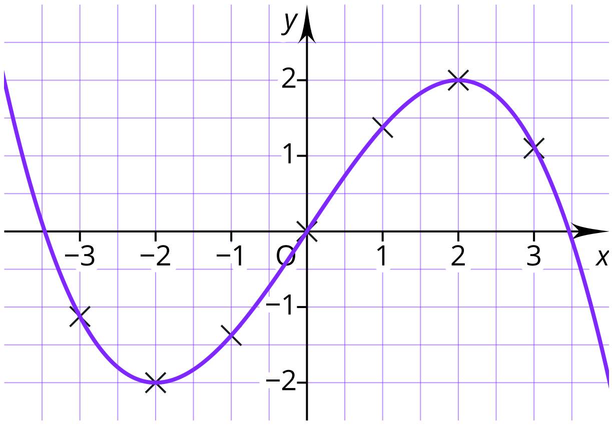
(1)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$h(x)$	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5



(2)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$k(x)$	$-1\frac{1}{8}$	-2	$-1\frac{3}{8}$	0	$1\frac{3}{8}$	2	$1\frac{1}{8}$



b) Für alle Werte in der Wertetabelle sind die Funktionswerte einer Zahl x und ihrer Gegenzahl $-x$ ebenfalls Gegenzahlen. Es gilt $-h(x) = h(-x)$ sowie $-k(x) = k(-x)$.

c) Der Graph von $h(x)$ ist eine Gerade, die durch den Ursprung verläuft. Der Graph der Funktion $k(x)$ hat einen Hochpunkt bei $H(2|2)$ und einen Tiefpunkt bei $T(-2|-2)$ und geht ebenfalls durch den Ursprung.

③ $f(x) = 2x^3 + x^2$

$f(-x) = 2(-x)^3 + (-x)^2$

$f(-x) = -2x^3 + x^2$

$f(x) \neq f(-x)$

$\Rightarrow$ Die Funktion ist nicht achsensymmetrisch zur y-Achse.

$-f(x) = -2x^3 - x^2$

$-f(x) \neq f(-x)$

$\Rightarrow$ Die Funktion ist nicht punktsymmetrisch zum Ursprung.