

Wenn ein LGS gelöst werden soll, lohnt es sich, vorher einen Blick auf die Gleichungen zu werfen. Manchmal lässt sich durch einfache Tricks Arbeit sparen.

Gleichungen vertauschen

Es kann vorkommen, dass bei einer oder mehreren Gleichungen in einem LGS Variablen fehlen. Das bedeutet, dass der Koeffizient vor diesen Variablen bereits null ist, sodass sie nicht mehr mit aufgeführt werden müssen. Das ist im folgenden LGS bei den Gleichungen I und III der Fall.

$$\begin{array}{l} I. \quad 2x_2 + 5x_3 = 1 \quad | II \\ II. \quad 1x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 6 \quad | I \\ III. \quad 4x_2 + 3x_3 = -5 \end{array}$$

In diesem LGS ist es gar nicht möglich, die Gleichung I so zu multiplizieren, dass der Koeffizient vor dem x_1 die Gegenzahl zum Koeffizienten vor dem x_1 in Gleichung II ist. Stattdessen ist es erlaubt, die Reihenfolge der Gleichungen zu tauschen. In diesem Fall ist es sinnvoll, die Gleichungen I und II zu tauschen:

$$\begin{array}{l} I_a. \quad 1x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 6 \\ II_a. \quad 2x_2 + 5x_3 = 1 \\ III_a. \quad 4x_2 + 3x_3 = -5 \end{array}$$

Nun ist das LGS so geordnet, dass gut erkennbar ist, dass zwei Gleichungen kein x_1 mehr enthalten. Die Gleichungen II und III müssen nun verwendet werden, um die Stufenform zu erhalten. Dafür wird die zweite Gleichung mit dem Faktor „-2“ multipliziert. Anschließend werden die Gleichungen II und III addiert.

Gleichungen subtrahieren

Neben der Möglichkeit, Gleichungen zu addieren, gibt es auch die Möglichkeit zwei Gleichungen voneinander zu subtrahieren. Dafür sollten wie schon bei der Addition die Zeilen sauber untereinander geschrieben werden. Im folgenden LGS steht in allen drei Zeilen vor x_1 der Koeffizient 2.

$$\begin{array}{l} I. \quad 2x_1 + 2x_2 + 1x_3 = 6 \\ II. \quad 2x_1 - 1x_2 + 3x_3 = -7 \quad | I - II \\ III. \quad 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 7 \quad | I - III \\ \\ I_a. \quad 2x_1 + 2x_2 + 1x_3 = 6 \\ II_a. \quad 3x_2 - 2x_3 = 13 \\ III_a. \quad -1x_2 - 1x_3 = -1 \end{array}$$

Unsinnige Schritte beim Lösen eines LGS

Nicht alles, was auf den ersten Blick sinnvoll erscheint, ist zielführend.

So liegt es vielleicht nahe, bei der Gleichung II_a $6x_2$ zu subtrahieren, um insgesamt „ $-4x_2$ “ in dieser Gleichung zu haben. Diese Rechenoperation würde jedoch dazu führen, dass auf der rechten Seite der Gleichung ebenfalls „ $-6x_2$ “ stehen würden, was dem Grundsatz widerspricht, gleiche Variablen sauber untereinander zu schreiben:

$$\begin{array}{l} I. \quad 2x_2 + 5x_3 = 1 \quad | \quad II \\ II. \quad 1x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 6 \quad | \quad I \\ III. \quad 4x_2 + 3x_3 = -5 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} II_a. \quad 2x_2 + 5x_3 = 1 \quad | \quad - 6x_2 \\ II_b. \quad -4x_2 + 3x_3 = -5 - 6x_2 \end{array}$$

**Sinnvolle Rechenschritte beim Lösen eines LGS**

- Die Reihenfolge der Gleichungen darf geändert werden.
- Koeffizienten können durch Multiplikation oder Division der gesamten Gleichung verändert werden.
- Gleichungen können als Ganzes zu anderen Gleichungen addiert oder von ihnen subtrahiert werden.


**Unsinnige Rechenschritte beim Lösen eines LGS**

- Koeffizienten sollten nicht durch Addition und Subtraktion verändert werden.

Es ist auch nicht immer sinnvoll, das LGS in die Dreiecksform zu bringen. Bei manchen Gleichungen bietet sich ein anderes Vorgehen an. Ein Beispiel dafür ist das folgende LGS.


$$\begin{array}{l} I. \quad 2x_1 - 3x_2 + 1x_3 = 0 \\ II. \quad -2x_1 + 3x_2 = 5 \\ III. \quad 1x_1 \quad \quad \quad + 2x_3 = 12 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} I. \quad 2x_1 - 3x_2 + 1x_3 = 0 \\ II. \quad -2x_1 + 3x_2 = 5 \quad | \quad I + II \\ III. \quad 1x_1 \quad \quad \quad + 2x_3 = 12 \end{array}$$


 Beim Addieren der Gleichungen I und II werden die Variablen x_1 und x_2 mit einem Schritt eliminiert. Die Variable x_3 lässt sich so mit einem Schritt bestimmen.

$$\begin{array}{l} I_a. \quad 2x_1 - 3x_2 + 1x_3 = 0 \\ II_a. \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad x_3 = 5 \\ III_a. \quad 1x_1 \quad \quad \quad + 2x_3 = 12 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} III. \quad 1x_1 \quad \quad \quad + 2 \cdot 5 = 12 \\ \quad \quad 1x_1 \quad \quad \quad + 10 = 12 \quad | \quad - 10 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad x_1 = 2 \end{array}$$

 Das x_3 kann dann in Gleichung III eingesetzt werden, um x_1 zu bestimmen.

$$\begin{array}{l} II. \quad -2 \cdot 2 + 3x_2 = 5 \\ \quad \quad -4 + 3x_2 = 5 \quad | \quad + 4 \\ \quad \quad \quad \quad \quad 3x_2 = 9 \quad | \quad : 3 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad x_2 = 3 \end{array}$$

 Die letzte Variable ist dann x_2 . Sie lässt sich durch Einsetzen in Gleichung I oder II berechnen.

$$L = \{2; 3, 5\}$$