

- ① Gegeben sind die Punkte $P(3|1|-2)$ und $Q(0|1|7)$.

a) Untersuche, ob die Punkte P und Q in der Ebene E liegen.

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) Bestimme einen Wert für a , so dass der Punkt P in der Ebene $E: 6x_1 + ax_2 + 4x_3 = 1$ liegt.

- ② Die Ebene E hat nur einen Spurpunkt: $S_{x_2}(0|3|0)$.

a) Beschreibe die besondere Lage der Ebene im Koordinatensystem.

b) Gib eine Parametergleichung und eine Koordinatengleichung der Ebene an.

- ③ Gegeben ist die Ebene $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Gib eine Gerade an, die die beschriebenen Eigenschaften erfüllt.

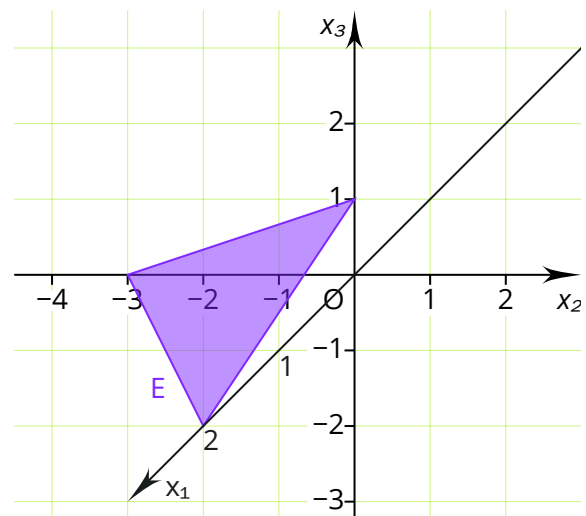
a) Die Gerade g schneidet die Ebene E senkrecht im Punkt $P(4|3|-4)$.

b) Die Gerade h liegt in der Ebene E .

c) Die Gerade k hat keine gemeinsamen Punkte mit E .

- ④ Gegeben ist die Abbildung der Ebene E sowie die Ebene $F: 1,5x_1 - x_2 + 3x_3 = 3$.

Untersuche, wie die beiden Ebenen zueinander liegen.



Musterlösung



Bitte beachte, dass die Musterlösung beispielhafte Rechenwege zeigt. Teilweise sind alternative Rechenwege und Lösungen möglich. Das gilt insbesondere für die Angabe von Geraden- und Ebenengleichungen.

① a) **Untersuchung von Punkt P**

Der Ortsvektor des Punktes wird mit der Ebenengleichung gleichgesetzt:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich das LGS:

$$\begin{array}{lcl} I. & 3 & = -1 + 4r + 3s \\ II. & 1 & = 7 - 6r + 4s \\ III. & -2 & = -3 + 1r + 0s \end{array}$$

Lösen des LGS ergibt:

$$r = 1; s = 0$$

Das LGS ist eindeutig lösbar. Die Punktprobe ist positiv. Der Punkt P liegt in der Ebene E .

Untersuchung von Punkt Q

Der Ortsvektor des Punktes wird mit der Ebenengleichung gleichgesetzt:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich das LGS:

$$\begin{array}{lcl} I. & 0 & = -1 + 4r + 3s \\ II. & 1 & = 7 - 6r + 4s \\ III. & 7 & = -3 + 1r + 0s \end{array}$$

Beim Lösen des LGS gibt es einen Widerspruch: $L = \{\}$.

b) Der Punkt P wird in die Ebenengleichung eingesetzt.

$$6 \cdot 3 + a \cdot 1 + 4 \cdot (-2) = 1$$

Umstellen der Gleichung ergibt $a = -9$.

② a) Die Ebene liegt parallel zur x_1x_3 -Ebene.

$$\text{b) z. B. } E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{z. B. } E: x_2 = 3$$

③ a) Der Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene wird als Vektorprodukt der beiden Spannvektoren bestimmt:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Da die Gerade g senkrecht zu E liegt, kann der Normalenvektor der Ebene als Richtungsvektor der Geraden eingesetzt werden. Als Stützvektor dient der Ortsvektor des Schnittpunktes:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 14 \end{pmatrix}$$

b) Hier gibt es unendlich viele Möglichkeiten. Eine Möglichkeit ist, den Stützvektor und einen Spannvektor der Ebene als Richtungsvektor inklusive Parameter zu übernehmen:

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) Wenn die Ebene E und die Gerade k keine gemeinsamen Punkte haben, müssen sie parallel zueinander liegen. Dazu kann als Stützvektor ein Ortsvektor eines beliebigen Punktes verwendet werden, der nicht in der Ebene E liegt. Als Richtungsvektor kann ein Spannvektor der Ebene verwendet werden.

$$k: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- ④ Um die Ebene E aufstellen zu können, werden die Spurpunkte der Ebene aus der Abbildung entnommen:

$$S_{x_1}(2|0|0), S_{x_2}(0|-3|0) \text{ und } S_{x_3}(0|0|1)$$

Mithilfe der Spurpunkte wird eine Parametergleichung der Ebene aufgestellt:

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Parametergleichung wird in eine Koordinatengleichung umgewandelt:

$$E: 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 6$$

Die Untersuchung der Normalenvektoren zeigt, dass sie linear abhängig sind:

$$\vec{n}_E = k \cdot \vec{n}_F$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 1,5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ mit } k = 2$$

Durch eine Multiplikation lässt sich die Ebenengleichung von F in E überführen:

$$1,5x_1 - x_2 + 3x_3 = 3 \quad | \cdot 2$$

$$3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 6$$

$\Rightarrow$ Die Ebenen E und F sind identisch.