GN: Übungsklausur

Mathematik Gleichungen

① Gegeben sind die Punkte $P(3|1|\text{-}2)$ und $Q(0|1|7)$.

a) Untersuche, ob die Punkte P und Q in der Ebene E liegen.

$$E\colon \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) Bestimme einen Wert für a, so dass der Punkt P in der Ebene $E\colon 6x_1 + ax_2 + 4x_3 = 1$ liegt.

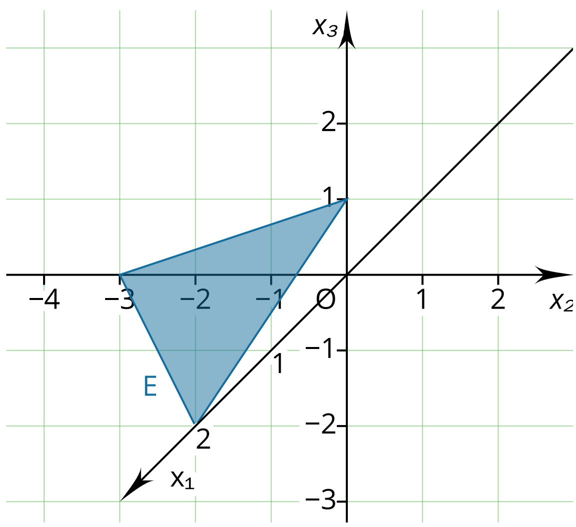
② Die Ebene E hat nur einen Spurpunkt: $S_{x_2}(0|3|0)$.
a) Beschreibe die besondere Lage der Ebene im Koordinatensystem.
b) Gib eine Parametergleichung und eine Koordinatengleichung der Ebene an.

③ Gegeben ist die Ebene $E\colon \left(\overrightarrow{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 14 \end{pmatrix} = 0$.

Gib eine Gerade an, die die beschriebenen Eigenschaften erfüllt.

a) Die Gerade g schneidet die Ebene E senkrecht im Punkt $P(4|3|\text{-}4)$.
b) Die Gerade h liegt in der Ebene E.
c) Die Gerade k hat keine gemeinsamen Punkte mit E.

④ Gegeben ist die Abbildung der Ebene E sowie die Ebene $F\colon \text{-}2x_1 + x_2 - 7x_3 = \text{-}3$.
Untersuche, wie die beiden Ebenen zueinander liegen und bestimme gegebenenfalls die Schnitt-gerade.



Musterlösung

Bitte beachte, dass die Musterlösung beispielhafte Rechenwege zeigt. Teilweise sind alternative Rechenwege und Lösungen möglich. Das gilt insbesondere für die Angabe von Geraden- und Ebenengleichungen.

① a) **Untersuchung von Punkt P**

Der Ortsvektor des Punktes wird mit der Ebenengleichung gleichgesetzt:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich das LGS:

$$\begin{array}{rrrrr} I. & 3 = & -1 + & 4r + & 3s \\ II. & 1 = & 7 - & 6r + & 4s \\ III. & -2 = & -3 + & 1r + & 0s \end{array}$$

Lösen des LGS ergibt:

$r = 1; s = 0$

Das LGS ist eindeutig lösbar. Die Punktprobe ist positiv. Der Punkt P liegt in der Ebene E.

Untersuchung von Punkt Q

Der Ortsvektor des Punktes wird mit der Ebenengleichung gleichgesetzt:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich das LGS:

$$\begin{array}{rrrrr} I. & 0 = & -1 + & 4r + & 3s \\ II. & 1 = & 7 - & 6r + & 4s \\ III. & 7 = & -3 + & 1r + & 0s \end{array}$$

Beim Lösen des LGs gibt es einen Widerspruch: $L = \{\}$.

Das LGS hat keine Lösung. Die Punktprobe ist negativ. Der Punkt Q liegt nicht in der Ebene E.

b) Der Punkt P wird in die Ebenengleichung eingesetzt.

$$6 \cdot 3 + a \cdot 1 + 4 \cdot (\text{-}2) = 1$$

Umstellen der Gleichung ergibt $a = \text{-}9$.

② a) Die Ebene liegt parallel zur x_1x_3-Ebene.

b) z. B. $E\colon \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

z. B. $E\colon x_2 = 3$

③ a) Der Normalenvektor $\overrightarrow{n}$ der Ebene wird mit dem Vektorprodukt bestimmt:

$$\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ \text{-}3 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ \text{-}3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Da die Gerade g senkrecht zu E liegt, kann der Normalenvektor der Ebene als Richtungsvektor der Geraden eingesetzt werden. Als Stützvektor dient der Ortsvektor des Schnittpunktes:

$$g\colon \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ \text{-}4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 14 \end{pmatrix}$$

b) Hier gibt es unendlich viele Möglichkeiten. Eine Möglichkeit ist, den Stützvektor und einen Spannvektor der Ebene als Richtungsvektor inklusive Parameter zu übernehmen:

$$h\colon \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ \text{-}2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ \text{-}3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) Wenn die Ebene E und die Gerade k keine gemeinsamen Punkte haben, müssen sie parallel zueinander liegen. Dazu kann als Stützvektor ein Ortsvektor eines beliebigen Punktes verwendet werden, der nicht in der Ebene E liegt. Als Richtungsvektor kann ein Spannvektor der Ebene verwendet werden.

$$h\colon \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ \text{-}3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

④ Um die Ebene E aufstellen zu können, werden die Spurpunkte der Ebene aus der Abbildung entnommen:

$S_{x_1}(2|0|0)$, $S_{x_2}(0|\text{-}3|0)$ und $S_{x_3}(0|0|1)$

Mithilfe der Spurpunkte wird eine Parametergleichung der Ebene aufgestellt:

$$E\colon \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Das Vektorprodukt der Richtungsvektoren ergibt den Normalenvektor der Ebene:

$$\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Der Normalenvektor der Ebene K kann der Ebenengleichung direkt entnommen werden. Die Untersuchung der Normalenvektoren zeigt, dass sie nicht linear abhängig sind:

$$\overrightarrow{n_E} = k \cdot \overrightarrow{n_F}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \neq k \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Die Ebenen E und F schneiden sich.

Um die Schnittgerade zu bestimmen, werden die Werte der Koordinaten der Ebene E in die Ebene F eingesetzt:

$$-2 \cdot (2 - 2r - 2s) + 1 \cdot (-3r) - 7 \cdot (1s) = -3$$

Die so entstandene Gleichung wird nach einer der beiden Variablen umgestellt:

$$\begin{aligned} &-4 + 4r + 4s - 3r - 7s = -3 \quad |+4 \\ &1r - 3s = 1 \quad |+3s \\ &r = 1 + 3s \end{aligned}$$

Der Parameter wird in die Ebene E eingesetzt:

$$g\colon \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (1+3s)\cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + s\cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nun werden die Klammern aufgelöst und die Vektoren zusammengefasst:

$$g\colon \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1\cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + 3s\cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + s\cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$g\colon \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + s\cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix} + s\cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$g\colon \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + s\cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -9 \\ 1 \end{pmatrix}$$