

- ① Gegeben sind die Punkte  $P(3|1|-2)$  und  $Q(0|1|7)$ .

a) Untersuche, ob die Punkte  $P$  und  $Q$  in der Ebene  $E$  liegen.

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) Bestimme einen Wert für  $a$ , so dass der Punkt  $P$  in der Ebene  $E: 6x_1 + ax_2 + 4x_3 = 1$  liegt.

- ② Die Ebene  $E$  hat nur einen Spurpunkt:  $S_{x_2}(0|3|0)$ .

a) Beschreibe die besondere Lage der Ebene im Koordinatensystem.

b) Gib eine Parametergleichung und eine Koordinatengleichung der Ebene an.

- ③ Gegeben ist die Ebene  $E: \left( \vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 14 \end{pmatrix} = 0$ .

Gib eine Gerade an, die die beschriebenen Eigenschaften erfüllt.

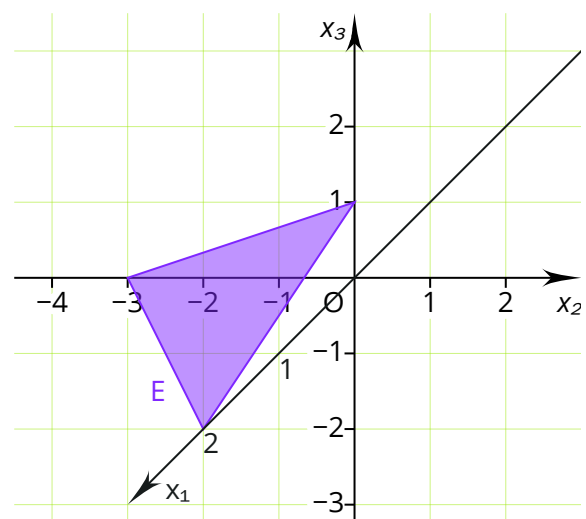
a) Die Gerade  $g$  schneidet die Ebene  $E$  senkrecht im Punkt  $P(4|3|-4)$ .

b) Die Gerade  $h$  liegt in der Ebene  $E$ .

c) Die Gerade  $k$  hat keine gemeinsamen Punkte mit  $E$ .

- ④ Gegeben ist die Abbildung der Ebene  $E$  sowie die Ebene  $F: -2x_1 + x_2 - 7x_3 = -3$ .

Untersuche, wie die beiden Ebenen zueinander liegen und bestimme gegebenenfalls die Schnittgerade.



## Musterlösung



Bitte beachte, dass die Musterlösung beispielhafte Rechenwege zeigt. Teilweise sind alternative Rechenwege und Lösungen möglich. Das gilt insbesondere für die Angabe von Geraden- und Ebenengleichungen.

### ① a) Untersuchung von Punkt $P$

Der Ortsvektor des Punktes wird mit der Ebenengleichung gleichgesetzt:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich das LGS:

$$\begin{array}{lll} \text{I.} & 3 = & -1 + 4r + 3s \\ \text{II.} & 1 = & 7 - 6r + 4s \\ \text{III.} & -2 = & -3 + 1r + 0s \end{array}$$

Lösen des LGS ergibt:

$$r = 1; s = 0$$

Das LGS ist eindeutig lösbar. Die Punktprobe ist positiv. Der Punkt  $P$  liegt in der Ebene  $E$ .

### Untersuchung von Punkt $Q$

Der Ortsvektor des Punktes wird mit der Ebenengleichung gleichgesetzt:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich das LGS:

$$\begin{array}{lll} \text{I.} & 0 = & -1 + 4r + 3s \\ \text{II.} & 1 = & 7 - 6r + 4s \\ \text{III.} & 7 = & -3 + 1r + 0s \end{array}$$

Beim Lösen des LGS gibt es einen Widerspruch:  $L = \{\}$ .

Das LGS hat keine Lösung. Die Punktprobe ist negativ. Der Punkt  $Q$  liegt nicht in der Ebene  $E$ .

b) Der Punkt  $P$  wird in die Ebenengleichung eingesetzt.

$$6 \cdot 3 + a \cdot 1 + 4 \cdot (-2) = 1$$

Umstellen der Gleichung ergibt  $a = -9$ .

② a) Die Ebene liegt parallel zur  $x_1x_3$ -Ebene.

$$\text{b) z. B. } E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{z. B. } E: x_2 = 3$$

③ a) Der Normalenvektor  $\vec{n}$  der Ebene wird mit dem Vektorprodukt bestimmt:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Da die Gerade  $g$  senkrecht zu  $E$  liegt, kann der Normalenvektor der Ebene als Richtungsvektor der Geraden eingesetzt werden. Als Stützvektor dient der Ortsvektor des Schnittpunktes:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 14 \end{pmatrix}$$

b) Hier gibt es unendlich viele Möglichkeiten. Eine Möglichkeit ist, den Stützvektor und einen Spannvektor der Ebene als Richtungsvektor inklusive Parameter zu übernehmen:

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) Wenn die Ebene  $E$  und die Gerade  $k$  keine gemeinsamen Punkte haben, müssen sie parallel zueinander liegen. Dazu kann als Stützvektor ein Ortsvektor eines beliebigen Punktes verwendet werden, der nicht in der Ebene  $E$  liegt. Als Richtungsvektor kann ein Spannvektor der Ebene verwendet werden.

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- ④ Um die Ebene  $E$  aufstellen zu können, werden die Spurpunkte der Ebene aus der Abbildung entnommen:

$$S_{x_1}(2|0|0), S_{x_2}(0|-3|0) \text{ und } S_{x_3}(0|0|1)$$

Mithilfe der Spurpunkte wird eine Parametergleichung der Ebene aufgestellt:

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Das Vektorprodukt der Richtungsvektoren ergibt den Normalenvektor der Ebene:

$$\vec{n}_E = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Der Normalenvektor der Ebene  $K$  kann der Ebenengleichung direkt entnommen werden. Die Untersuchung der Normalenvektoren zeigt, dass sie nicht linear abhängig sind:

$$\vec{n}_E = k \cdot \vec{n}_F$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \neq k \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$  Die Ebenen  $E$  und  $F$  schneiden sich.

Um die Schnittgerade zu bestimmen, werden die Werte der Koordinaten der Ebene  $E$  in die Ebene  $F$  eingesetzt:

$$-2 \cdot (2 - 2r - 2s) + 1 \cdot (-3r) - 7 \cdot (1s) = -3$$

Die so entstandene Gleichung wird nach einer der beiden Variablen umgestellt:

$$-4 + 4r + 4s - 3r - 7s = -3 \quad | +4$$

$$1r - 3s = 1 \quad | +3s$$

$$r = 1 + 3s$$

Der Parameter wird in die Ebene  $E$  eingesetzt:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (1 + 3s) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nun werden die Klammern aufgelöst und die Vektoren zusammengefasst:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + 3s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -9 \\ 1 \end{pmatrix}$$