

- ① Gegeben sind die Punkte $P(3|1|-2)$ und $Q(0|1|7)$.

a) Untersuche, ob die Punkte P und Q in der Ebene E liegen.

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) Bestimme einen Wert für a , so dass der Punkt P in der Ebene $E: 6x_1 + ax_2 + 4x_3 = 1$ liegt.

- ② Die Ebene E hat nur einen Spurpunkt: $S_{x_2}(0|3|0)$.

a) Beschreibe die besondere Lage der Ebene im Koordinatensystem.

b) Gib eine Parametergleichung und eine Koordinatengleichung der Ebene an.

- ③ Gegeben ist die Ebene $E: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 14 \end{pmatrix} = 0$.

Gib eine Gerade an, die die beschriebenen Eigenschaften erfüllt.

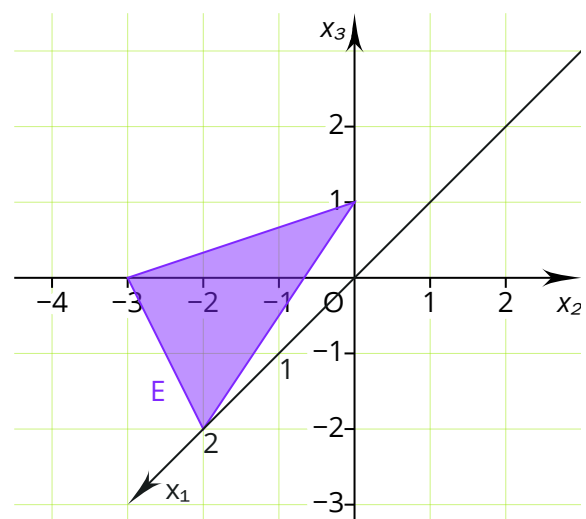
a) Die Gerade g schneidet die Ebene E senkrecht im Punkt $P(4|3|-4)$.

b) Die Gerade h liegt in der Ebene E .

c) Die Gerade k hat keine gemeinsamen Punkte mit E .

- ④ Gegeben ist die Abbildung der Ebene E sowie die Ebene $F: -2x_1 + x_2 - 7x_3 = -3$.

Untersuche, wie die beiden Ebenen zueinander liegen und bestimme gegebenenfalls die Schnittgerade.



Musterlösung



Bitte beachte, dass die Musterlösung beispielhafte Rechenwege zeigt. Teilweise sind alternative Rechenwege und Lösungen möglich. Das gilt insbesondere für die Angabe von Geraden- und Ebenengleichungen.

① a) Untersuchung von Punkt P

Der Ortsvektor des Punktes wird mit der Ebenengleichung gleichgesetzt:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich das LGS:

$$\begin{array}{lcl} I. & 3 = & -1 + 4r + 3s \\ II. & 1 = & 7 - 6r + 4s \\ III. & -2 = & -3 + 1r + 0s \end{array}$$

Lösen des LGS ergibt:

$$r = 1; s = 0$$

Das LGS ist eindeutig lösbar. Die Punktprobe ist positiv. Der Punkt P liegt in der Ebene E .

Untersuchung von Punkt Q

Der Ortsvektor des Punktes wird mit der Ebenengleichung gleichgesetzt:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich das LGS:

$$\begin{array}{lcl} I. & 0 = & -1 + 4r + 3s \\ II. & 1 = & 7 - 6r + 4s \\ III. & 7 = & -3 + 1r + 0s \end{array}$$

Beim Lösen des LGS gibt es einen Widerspruch: $L = \{\}$.

Das LGS hat keine Lösung. Die Punktprobe ist negativ. Der Punkt Q liegt nicht in der Ebene E .

b) Der Punkt P wird in die Ebenengleichung eingesetzt.

$$6 \cdot 3 + a \cdot 1 + 4 \cdot (-2) = 1$$

Umstellen der Gleichung ergibt $a = -9$.

② a) Die Ebene liegt parallel zur x_1x_3 -Ebene.

$$\text{b) z. B. } E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{z. B. } E: x_2 = 3$$

③ a) Der Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene wird mit dem Vektorprodukt bestimmt:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Da die Gerade g senkrecht zu E liegt, kann der Normalenvektor der Ebene als Richtungsvektor der Geraden eingesetzt werden. Als Stützvektor dient der Ortsvektor des Schnittpunktes:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 14 \end{pmatrix}$$

b) Hier gibt es unendlich viele Möglichkeiten. Eine Möglichkeit ist, den Stützvektor und einen Spannvektor der Ebene als Richtungsvektor inklusive Parameter zu übernehmen:

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) Wenn die Ebene E und die Gerade k keine gemeinsamen Punkte haben, müssen sie parallel zueinander liegen. Dazu kann als Stützvektor ein Ortsvektor eines beliebigen Punktes verwendet werden, der nicht in der Ebene E liegt. Als Richtungsvektor kann ein Spannvektor der Ebene verwendet werden.

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- ④ Um die Ebene E aufstellen zu können, werden die Spurpunkte der Ebene aus der Abbildung entnommen:

$$S_{x_1}(2|0|0), S_{x_2}(0|-3|0) \text{ und } S_{x_3}(0|0|1)$$

Mithilfe der Spurpunkte wird eine Parametergleichung der Ebene aufgestellt:

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Das Vektorprodukt der Richtungsvektoren ergibt den Normalenvektor der Ebene:

$$\vec{n}_E = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Der Normalenvektor der Ebene K kann der Ebenengleichung direkt entnommen werden. Die Untersuchung der Normalenvektoren zeigt, dass sie nicht linear abhängig sind:

$$\vec{n}_E = k \cdot \vec{n}_F$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \neq k \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Die Ebenen E und F schneiden sich.

Um die Schnittgerade zu bestimmen, werden die Werte der Koordinaten der Ebene E in die Ebene F eingesetzt:

$$-2 \cdot (2 - 2r - 2s) + 1 \cdot (-3r) - 7 \cdot (1s) = -3$$

Die so entstandene Gleichung wird nach einer der beiden Variablen umgestellt:

$$-4 + 4r + 4s - 3r - 7s = -3 \quad | +4$$

$$1r - 3s = 1 \quad | +3s$$

$$r = 1 + 3s$$

Der Parameter wird in die Ebene E eingesetzt:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (1 + 3s) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nun werden die Klammern aufgelöst und die Vektoren zusammengefasst:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + 3s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -9 \\ 1 \end{pmatrix}$$