① Löse das LGS und gib die Lösungsmenge an.

a)

$$\begin{array}{rrrrl} I. & 2x_1 & +\ 1x_2 & +\ 1x_3 & = 3 \\ II. & -2x_1 & -\ 1x_2 & +\ 1x_3 & = -7 \\ III. & -2x_1 & -\ 2x_2 & +\ 3x_3 & = -12 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{rrrrl} I. & 2x_1 & & -\ 3x_3 & = 1 \\ II. & -1x_1 & +\ 2x_2 & & = 7 \\ III. & 1x_1 & -\ 2x_2 & +\ 3x_3 & = -10 \end{array}$$

② Die Geschwister Tim, Tina und Tomte haben von ihrem Onkel etwas Geld zugesteckt bekommen. Nun zählen sie zusammen, wie viel es ist. Tom sagt: „Ich habe 6 Münzen der Sorte A, 2 Münzen der Sorte B und 1 Münze der Sorte C. Insgesamt habe ich 1,20 €.“ Tina antwortet: „Ich habe gleich viel Geld, allerdings habe ich andere Münzen. Ich habe 4 Münzen der Sorte A und 2 Münzen der Sorte C.“ „Nicht zu fassen!“, empört sich Tomte, „Ich habe zwar am meisten Münzen, aber trotzdem nur 1,10 € bekommen. Ich habe 8 Münzen der Sorte A, 1 Münze der Sorte B und 1 Münze der Sorte C.“

a) Stelle ein LGS auf, mit dem sich bestimmen lässt, um welche Geldstücke es sich bei den Sorten A, B und C handelt. Du brauchst es nicht zu berechnen.

b) Zeige mithilfe einer Probe, dass es sich bei den Sorten A, B und C um die Münzen 5 Cent, 20 Cent und 50 Cent handelt.

③ Gegeben ist das folgende LGS abhängig von a und b in Matrixschreibweise.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & a & b \end{array}\right)$$

a) Ordne die Lösungsmengen den unterschiedlichen Fällen zu.

a = 0; b = 0 ●	○ L = {2; -1; 0}
a = 0; b ≠ 0 ●	○ L = {2; -1; x_3}
a = 1; b = 0 ●	○ L = { }

b) Gib ein Wertepaar a und b an, für das die Lösungsmenge L = {2; -1; 3} ist.

④ Eine Funktion 3. Grades geht durch den Punkt P (1|-5), schneidet die y-Achse bei 1 und hat bei x = 2 eine Wendestelle. Die Steigung bei x = 0 ist -1.
Bestimme die Funktionsgleichung der Funktion.

Musterlösung

Bitte beachte, dass die Musterlösung beispielhafte Rechenwege zeigt. Teilweise sind alternative Rechenwege möglich.

①

a) Die Aufgabe kann z. B. mit dem Gaußverfahren in der Matrixschreibweise gelöst werden:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 1 & -7 \\ -2 & -2 & 3 & -12 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mid I+II \\ \mid I+III \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 4 & -9 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mid III \\ \mid II \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 4 & -9 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mid \cdot 4 \\ \\ \mid \cdot (-2) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 4 & 4 & 12 \\ 0 & -1 & 4 & -9 \\ 0 & 0 & -4 & 8 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mid I+III \\ \mid II+III \\ \mid :(-4) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 4 & 0 & 20 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mid :4 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mid I+II \\ \mid :(-1) \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mid :2 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$L = \{2; 1; -2\}$$

b) Die Aufgabe kann ebenfalls mit dem Gaußverfahren in der Matrixschreibweise gelöst werden:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 7 \\ 1 & -2 & 3 & -10 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \mid II+III \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mid I+III \\ \\ \mid :3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mid :2 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mid I+II \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mid :2 \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$L = \{-1; 3; -1\}$$

②

a)

$$\begin{array}{rllll} I. & 6A & +\ 2B & +\ 1C & =\ 1{,}20 \\ II. & 4A & & +\ 2C & =\ 1{,}20 \\ III. & 8A & +\ 1B & +\ 1C & =\ 1{,}10 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{rllll} I. & 6\cdot 0{,}05 & +\ 2\cdot 0{,}20 & +\ 1\cdot 0{,}50 & =\ 1{,}20\ \checkmark \\ II. & 4\cdot 0{,}05 & & +\ 2\cdot 0{,}50 & =\ 1{,}20\ \checkmark \\ III. & 8\cdot 0{,}05 & +\ 1\cdot 0{,}20 & +\ 1\cdot 0{,}50 & =\ 1{,}10\ \checkmark \end{array}$$

③

a)
a = 0; b = 0 gehört zu L = {2; -1; x_3}
a = 0; b ≠ 0 gehört zu L = { }
a = 1; b = 0 gehört zu L = {2; -1; 0}

b)
L = {2; -1; 3} gehört z. B. zu a = 1; b = 3

④

Bedingungen:
I. f(1) = -5
II. f'(0) = -1
III. f''(2) = 0
IV. f(0) = 1

Allgemeine Funktionsgleichung:
$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

LGS:

$$\begin{array}{rllllll} I. & 1a & +\ 1b & +\ 1c & +\ 1d & = & \text{-}5 \\ II. & & & & 1d & = & 1 \\ III. & 12a & +\ 2b & & & = & 0 \\ IV. & & & 1c & & = & \text{-}1 \end{array}$$

Lösen des LGS ergibt:
$L = \{1; \text{-}6; \text{-}1; 1\}$

Die Funktionsgleichung lautet:
$f(x) = 1x^3 - 6x^2 - 1x + 1$