

① Löse das LGS und gib die Lösungsmenge an.

a)

$$I. \quad 2x_1 + 1x_2 + 1x_3 = 3$$

$$II. \quad -2x_1 - 1x_2 + 1x_3 = -7$$

$$III. \quad -2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -12$$

b)

$$I. \quad 2x_1 - 3x_3 = 1$$

$$II. \quad -1x_1 + 2x_2 = 7$$

$$III. \quad 1x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -10$$

② Die Geschwister Tim, Tina und Tomte haben von ihrem Onkel etwas Geld zugesteckt bekommen. Nun zählen sie zusammen, wie viel es ist. Tom sagt: „Ich habe 6 Münzen der Sorte A, 2 Münzen der Sorte B und 1 Münze der Sorte C. Insgesamt habe ich 1,20 €.“ Tina antwortet: „Ich habe gleich viel Geld, allerdings habe ich andere Münzen. Ich habe 4 Münzen der Sorte A und 2 Münzen der Sorte C.“ „Nicht zu fassen!“, empört sich Tomte, „Ich habe zwar am meisten Münzen, aber trotzdem nur 1,10 € bekommen. Ich habe 8 Münzen der Sorte A, 1 Münze der Sorte B und 1 Münze der Sorte C.“

a) Stelle ein LGS auf, mit dem sich bestimmen lässt, um welche Geldstücke es sich bei den Sorten A, B und C handelt. Du brauchst es nicht zu berechnen.

b) Zeige mithilfe einer Probe, dass es sich bei den Sorten A, B und C um die Münzen 5 Cent, 20 Cent und 50 Cent handelt.

③ Gegeben ist das folgende LGS abhängig von a und b in Matrixschreibweise.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & a & b \end{array} \right)$$

a) Ordne die Lösungsmengen den unterschiedlichen Fällen zu.

$$a = 0; b = 0 \quad \bullet \quad \circ \quad L = \{2; -1; 0\}$$

$$a = 0; b \neq 0 \quad \bullet \quad \circ \quad L = \{2; -1; x_3\}$$

$$a = 1; b = 0 \quad \bullet \quad \circ \quad L = \{ \}$$

b) Gib ein Wertepaar a und b an, für das die Lösungsmenge $L = \{2; -1; 3\}$ ist.

④ Eine Funktion 3. Grades geht durch den Punkt $P(1 | -5)$, schneidet die y -Achse bei 1 und hat bei $x = 2$ eine Wendestelle. Die Steigung bei $x = 0$ ist -1. Bestimme die Funktionsgleichung der Funktion.

Musterlösung



Bitte beachte, dass die Musterlösung beispielhafte Rechenwege zeigt. Teilweise sind alternative Rechenwege möglich.

①

a) Die Aufgabe kann z. B. mit dem Gaußverfahren in der Matrixschreibweise gelöst werden:

$$\begin{array}{lcl}
 \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 1 & -7 \\ -2 & -2 & 3 & -12 \end{array} \right) & \begin{array}{l} | I + II \\ | I + III \end{array} & \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 4 & 0 & 20 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right) & \begin{array}{l} | : 4 \\ \\ \end{array} \\
 \\
 \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 4 & -9 \end{array} \right) & \begin{array}{l} | III \\ | II \end{array} & \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right) & \begin{array}{l} | I + II \\ | : (-1) \\ \\ \end{array} \\
 \\
 \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 4 & -9 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{array} \right) & \begin{array}{l} | \cdot 4 \\ | \cdot (-2) \end{array} & \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right) & \begin{array}{l} | : 2 \\ \\ \\ \end{array} \\
 \\
 \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 4 & 4 & 12 \\ 0 & -1 & 4 & -9 \\ 0 & 0 & -4 & 8 \end{array} \right) & \begin{array}{l} | I + III \\ | II + III \\ | : (-4) \end{array} & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right) & \\
 \\
 & & L = \{2; 1; -2\}
 \end{array}$$

b) Die Aufgabe kann ebenfalls mit dem Gaußverfahren in der Matrixschreibweise gelöst werden:

$$\begin{array}{lcl}
 \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 7 \\ 1 & -2 & 3 & -10 \end{array} \right) & | II + III & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) & | I + II \\
 \\
 \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{array} \right) & \begin{array}{l} | I + III \\ | : 3 \end{array} & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) & | : 2 \\
 \\
 \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) & | : 2 & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) & \\
 \\
 & & L = \{-1; 3; -1\}
 \end{array}$$

②

a)

$$I. \quad 6A \quad + \quad 2B \quad + \quad 1C \quad = \quad 1,20$$

$$II. \quad 4A \quad + \quad 2C \quad = \quad 1,20$$

$$III. \quad 8A \quad + \quad 1B \quad + \quad 1C \quad = \quad 1,10$$

b)

$$I. \quad 6 \cdot 0,05 \quad + \quad 2 \cdot 0,20 \quad + \quad 1 \cdot 0,50 \quad = \quad 1,20 \quad \checkmark$$

$$II. \quad 4 \cdot 0,05 \quad + \quad 2 \cdot 0,50 \quad = \quad 1,20 \quad \checkmark$$

$$III. \quad 8 \cdot 0,05 \quad + \quad 1 \cdot 0,20 \quad + \quad 1 \cdot 0,50 \quad = \quad 1,10 \quad \checkmark$$

③

a)

 $a = 0; b = 0$ gehört zu $L = \{2; -1; x_3\}$ $a = 0; b \neq 0$ gehört zu $L = \{ \}$ $a = 1; b = 0$ gehört zu $L = \{2; -1; 0\}$

b)

 $L = \{2; -1; 3\}$ gehört z. B. zu $a = 1; b = 3$

④

Bedingungen:

$$I. \quad f(1) = -5$$

$$II. \quad f'(0) = -1$$

$$III. \quad f'(2) = 0$$

$$IV. \quad f(0) = 1$$

Allgemeine Funktionsgleichung:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

LGS:

$$I. \quad 1a \quad + \quad 1b \quad + \quad 1c \quad + \quad 1d \quad = \quad -5$$

$$II. \quad 1d \quad = \quad 1$$

$$III. \quad 12a \quad + \quad 2b \quad = \quad 0$$

$$IV. \quad 1c \quad = \quad -1$$

Lösen des LGS ergibt:

$$L = \{1; -6; -1; 1\}$$

Die Funktionsgleichung lautet:

$$f(x) = 1x^3 - 6x^2 - 1x + 1$$