INFO: Unterschiedliche Lösungsmengen

Mathematik Gleichungen

Wie schon beim Lösen eines LGS mit zwei Gleichungen kann auch ein LGS mit drei Gleichungen keine, genau eine oder unendlich viele Lösungen haben. Welcher Fall vorliegt, lässt sich in der Matrixschreibweise bestimmen, indem die Einheitsmatrix gebildet wird.

Das LGS hat genau eine Lösung

Wenn es möglich ist, eine Einheitsmatrix zu bilden, hat das LGS genau eine Lösung. Die Lösungsmenge entspricht den Zahlen hinter der senkrechten Linie.

Beispiel:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

$$L = \{1; 3, 5\}$$

Das LGS hat keine Lösung

Beim Versuch eine Einheitsmatrix zu bilden, entsteht eine Zeile in der nur noch Nullen sind. Hinter der senkrechten Linie steht in dieser Zeile eine Zahl die ungleich Null ist. Als Lösungsmenge wird eine leere Menge angegeben.

Beispiel:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -8 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$L = \{\ \}$$

Das LGS hat unendlich viele Lösungen

Beim Versuch eine Einheitsmatrix zu bilden, entsteht eine Zeile in der nur noch Nullen sind. Hinter der senkrechten Linie steht in dieser Zeile ebenfalls eine Null. Die Lösungsmenge wird wie auch schon bei einem LGS mit zwei Gleichungen in Abhängigkeit von einer Variablen angegeben. Dafür kann es hilfreich sein, das LGS wieder in die normale Schreibweise zu überführen.

Beispiel:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$L = \{-1 - x_3; 2 - x_3, x_3\}$$

Anzahl der Gleichungen

Damit ein LGS genau eine Lösung haben kann, muss es mindestens genau so viele Gleichungen wie Variablen haben. Hat ein LGS mehr Gleichungen als Variablen, kann das LGS mit weniger Gleichungen gelöst werden. Mit einer Probe muss dann aber gezeigt werden, dass die Ergebnisse für alle Gleichungen stimmen.

Das folgende LGS besteht aus vier Gleichungen, enthält aber nur drei Variablen.

$$\begin{array}{rrrrrr} I. & 2x_1 & -\ 4x_2 & +\ 1x_3 & = & -3 \\ II. & 4x_1 & +\ 1x_2 & -\ 4x_3 & = & 6 \\ III. & 1x_1 & +\ 1x_2 & -\ 1x_3 & = & 3 \\ IV. & 1x_1 & -\ 1x_2 & +\ 2x_3 & = & 3 \end{array}$$

Wenn das LGS mit den ersten drei Gleichungen gelöst wird, ergeben sich die Lösungen $x_1 = 2$; $x_2 = 2$ und $x_3 = 1$. Mit diesen Werten wird die Probe in allen Gleichungen durchgeführt.

$$\begin{array}{rrrrrr} I. & 2\cdot 2 & -\ 4\cdot 2 & +\ 1\cdot 1 & = & -3\ \checkmark \\ II. & 4\cdot 2 & +\ 1\cdot 2 & -\ 4\cdot 1 & = & 6\ \checkmark \\ III. & 1\cdot 2 & +\ 1\cdot 2 & -\ 1\cdot 1 & = & 3\ \checkmark \\ IV. & 1\cdot 2 & -\ 1\cdot 2 & +\ 2\cdot 1 & \neq & 3 \end{array}$$

Diese Probe ist Pflicht
Bei einem LGS mit mehr Gleichungen als Variablen ist die Probe Pflicht. Das LGS ist nur dann eindeutig lösbar, wenn die Lösungsmenge alle Gleichungen erfüllt.

Da es in der letzten Zeile einen Widerspruch gibt, gilt das ganze LGS als unlösbar. Damit ergibt sich eine leere Lösungsmenge:

$$L = \{\ \}$$

Anders ist es, wenn das LGS weniger Gleichungen als Variablen hat. Sofern es in den Gleichungen keinen Widerspruch gibt, hat das LGS unendlich viele Lösungen:

$$\begin{array}{rrrrrr} I. & 1x_1 & +\ 1x_2 & +\ 1x_3 & = & -3 \\ II. & -1x_1 & -\ 1x_2 & -\ 2x_3 & = & -1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & -2 & -1 \end{array}\right) \quad |\ I + II$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} |\ I + II \\ |\ :(-1) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Umstellen der Gleichungen ergibt die Lösungsmenge:

$$L = \{x_1; -x_1 - 7; 4\}$$