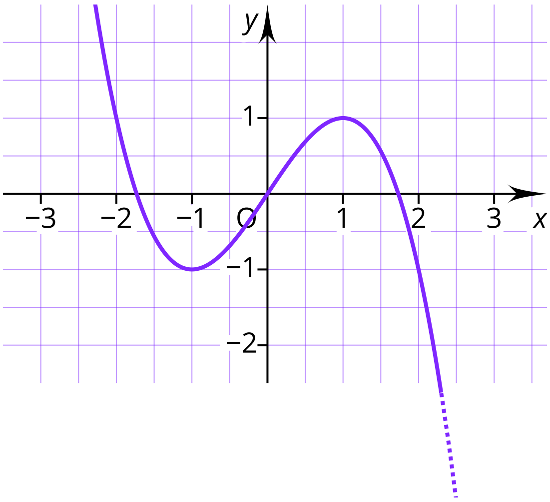
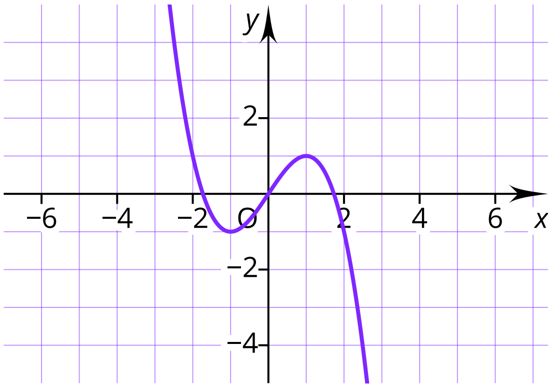
INFO: Verhalten im Unendlichen

Mathematik Funktionen 11

Was ist mit „Verhalten im Unendlichen“ gemeint?
Wenn der Graph einer Funktion gezeichnet wird, zeigt die Abbildung immer nur einen Ausschnitt der Funktion. Um Punkte darzustellen, die außerhalb des gezeichneten Bereichs liegen, könnte ein größeres Koordinatensystem gezeichnet oder die Skalierung angepasst werden.



Eine Funktion endet nicht abrupt, sondern läuft außerhalb des dargestellten Bereichs weiter.



Durch die Änderung der Skalierung kann ein größerer Ausschnitt des Graphen dargestellt werden.

Doch egal, wie grob die Skalierung gewählt wird oder das Koordinatensystem vergrößert wird, es kann niemals der ganze Graph gezeichnet werden, da die x-Werte beliebig groß werden können. Sie streben gegen unendlich. Das mathematische Symbol für unendlich ist ∞. Bei der Untersuchung des Verhaltens im Unendlichen wird angegeben, welchen Funktionswert eine Funktion annimmt, wenn x beliebig groß wird, also gegen $+\infty$ strebt oder beliebig klein wird, also gegen -∞ strebt.

Woran lässt sich bei ganzrationalen Funktionen erkennen, wie sich ein Graph im Unendlichen verhält?
Um zu untersuchen, wie sich eine Funktion im Unendlichen verhält, kann es hilfreich sein, sie zu zeichnen. Schneller geht es jedoch mit ein paar theoretischen Überlegungen:
Bei ganzrationalen Funktionen reicht es den Summanden mit dem höchsten Exponenten näher zu betrachten. So würde bei der Funktion $f(x) = 2x^4 + 3x^3 - 2x - 5$ nur der Teil $2x^4$ untersucht werden. Im zweiten Schritt wird dann überlegt, wie es sich auswirkt, wenn für x immer größere Zahlen eingesetzt werden. In diesem Fall würde eine sehr große Zahl hoch vier gerechnet und die Potenz dann noch verdoppelt werden. Es würde also eine noch viel größere Zahl herauskommen.
Entsprechend wird das Verhalten gegen -∞ untersucht, indem für x große, negative Zahlen eingesetzt werden. In diesem Fall würde eine große, negative Zahl hoch vier gerechnet werden, sodass eine positive Zahl entstehen würde, die dann noch verdoppelt wird. Das Ergebnis wäre also ebenfalls eine sehr große, positive Zahl.

INFO: Verhalten im Unendlichen

Mathematik Funktionen 11

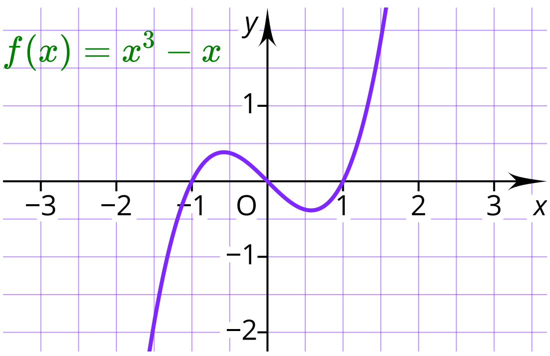
Welche Schreibweise wird verwendet, um das Verhalten im Unendlichen zu beschreiben?
Wenn das Verhalten im Unendlichen untersucht werden soll, wird immer für $+\infty$ und -∞ geprüft, wohin die Funktion läuft. Dann wird für beide Fälle eine Aussage formuliert, wobei das Streben gegen unendlich mit einem Pfeil ($\rightarrow$) dargestellt wird.

Beispielaufgabe
Untersuche das Verhalten der Funktion $f(x) = 2x^4 + 3x^3 - 2x - 5$ im Unendlichen.

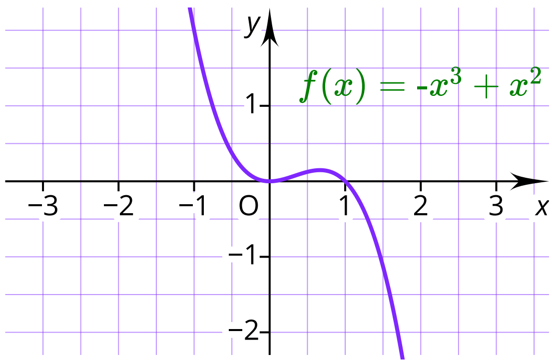
Lösung
Für $x \rightarrow +\infty$ gilt $f(x) \rightarrow +\infty$.
Für $x \rightarrow$ -∞ gilt $f(x) \rightarrow +\infty$.

Diese Lösung würde so vorgelesen werden:
Für x gegen plus unendlich gilt f(x) gegen plus unendlich. Für x gegen minus unendlich gilt f(x) gegen plus unendlich.

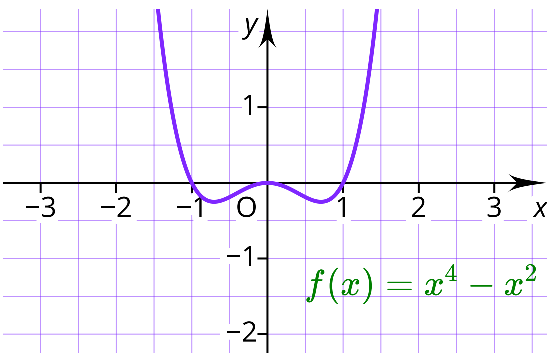
Welche unterschiedlichen Fälle können eintreten?
Die folgenden Beispiele zeigen die vier Möglichkeiten, wie das Verhalten ganzrationaler Funktionen, die mindestens den Grad 1 haben, im Unendlichen aussehen kann.



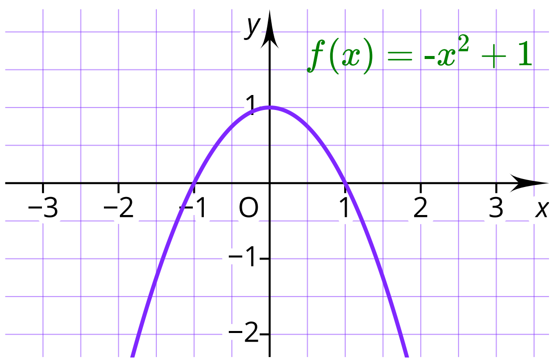
Für $x \rightarrow +\infty$ gilt $f(x) \rightarrow +\infty$.
Für $x \rightarrow$ -∞ gilt $f(x) \rightarrow$ -∞.



Für $x \rightarrow +\infty$ gilt $f(x) \rightarrow$ -∞.
Für $x \rightarrow$ -∞ gilt $f(x) \rightarrow +\infty$.



Für $x \rightarrow +\infty$ gilt $f(x) \rightarrow +\infty$.
Für $x \rightarrow$ -∞ gilt $f(x) \rightarrow +\infty$.



Für $x \rightarrow +\infty$ gilt $f(x) \rightarrow$ -∞.
Für $x \rightarrow$ -∞ gilt $f(x) \rightarrow$ -∞.