



INFO: Kugel

Mathematik Körper R 9

Einstieg

Eine **Kugel** ist im dreidimensionalen Raum das, was im zweidimensionalen Raum ein Kreis ist. Jede Kugel hat einen Mittelpunkt M . Alle Punkte auf der Kugeloberfläche haben den **gleichen** Abstand zu M . Dieser Abstand r heißt Radiuslänge.



Vergleich von Kreis und Kugel

	Kreis	Kugel
Mittelpunkt M	denselben Abstand von Kreislinie zum Mittelpunkt $M = (x y)$	denselben Abstand von Kugeloberfläche zum Zentrum $M = (x y z)$
Radius r	Strecke r zwischen einem Punkt P auf der Kreislinie zu M ; $r = \overline{PM}$	Strecke r zwischen einem Punkt P auf der Kugeloberfläche zu M ; $r = \overline{PM}$
Dimension	Ein Kreis befindet sich auf einer Ebene.	Eine Kugel befindet sich in einem Raum.
Zusammenfassung	Bei einem Kreis haben alle Punkte auf einer Ebene denselben Abstand r zum Mittelpunkt M .	Bei einer Kugel haben alle Punkte in einem Raum denselben Abstand r zum Zentrum M .



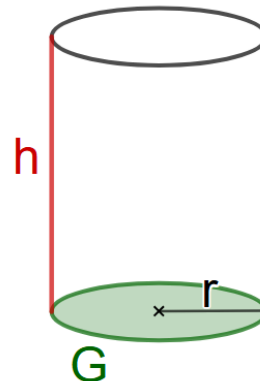


Volumen einer Kugel

Das Volumen einer Kugel lässt sich auf Basis des Volumens eines Zylinders herleiten. Wie das geht, erfährst du hier:

Im anderen Kapitel hast du bereits gelernt, wie man das Volumen eines Zylinders berechnet. Die allgemeine Formel dazu lautet:

$$V_{\text{Zylinder}} = A_G \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h$$



Schau dir folgendes Video an und überlege dir anschließend, wie man das Volumen einer Kugel berechnet:

Volumen Formel für die Kugel (Mathe Work 2.0)



Fülle den folgenden Lückentext aus:

Wenn ich eine Kugel, einen Kegel und einen Zylinder mit gleicher betrachte, dann passt in eine Kugel so viel Flüssigkeit wie in einen Kegel. Außerdem füllt der Inhalt der Kugel des Inhalts vom Zylinder.

Damit beträgt die Formel für den Flächeninhalt des Kegels:

$$V_{\text{Kugel}} = \text{} \cdot A_g \cdot h = \text{} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Die Formel kann ich jetzt noch ein bisschen vereinfachen: Die Höhe einer Kugel beträgt dem Zweifachen des Radius einer Kugel, d.h. $h = \text{} \cdot r$. Wenn ich das jetzt in die Formel oben einsetze, kommt folgendes heraus:

$$V_{\text{Kugel}} = \text{} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot 2r = \text{} \cdot \pi \cdot r^3$$



Volumen einer Kugel

Wenn man wissen möchte, wie groß der Rauminhalt einer Kugel ist, so muss man das Volumen berechnen.

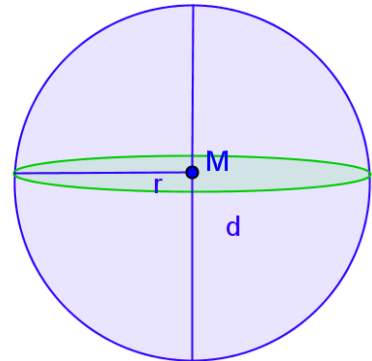


Volumen einer Kugel

Das Volumen einer Kugel berechnet sich wie folgt:

$$V_{Kugel} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

Kugel \-
Volumen
berechnen



Beispiel

Berechne das Volumen einer Billardkugel, die einen Durchmesser d von 57,2 mm hat.

Bevor du deinen gegebenen Wert sofort in die neue Formel einsetzt, musst du dir klarmachen, dass sich ein Kreis und eine Kugel hinsichtlich **Radius** und **Durchmesser** nicht unterscheiden.



$r =$

$V_{Billardkugel} =$

Antwort: Das Volumen der Billardkugel beträgt .



Oberflächeninhalt einer Kugel

Vereinfacht kann man sich eine Oberfläche wie einen Mantel vorstellen, der sich um die geometrische Figur legt. Eine Zeitungsseite kann so zu einem Kegel geformt werden, wenn man sie rollt. Diese Fläche ergibt die Oberfläche.

Wenn man nun **die Kugel** in Farbe eintaucht, so markiert man dessen Oberflächeninhalt. Mithilfe dieser Fläche kann man z. B. ausrechnen, wie viel Gold man braucht, damit man die Kugel auf der Dachspitze vom Olympiaturm vergolden kann.

Experiment

Schau dir das Video zum Experiment an!

Material je Gruppe:

- 1 Orange
- Lineal
- Weißes A4 Papier
- Stift

Video zum Experiment (Oberflächeninhalt einer Kugel)

Versuch für die Herleitung der Oberflächenformel einer Kugel.



1. Schält die Orange und zerteilt sie in 2 Hälften.
2. Legt eine Hälfte mit der flachen Seite nach unten auf ein Blatt Papier und zeichnet einen Kreis. Malt ihn mit dickem Stift nach.
3. Nehmt die Schale und legt euren Kreis mit den Schalenstückchen aus. Legt so, dass möglichst keine Lücken und keine Überlappungen entstehen.
4. Ihr habt noch Schale übrig? Dann zeichnet einen weiteren Kreis und fahrt fort wie in Schritt 3, bis alle Schalenstückchen eurer Orange in Kreisen ausgelegt wurden.
5. Notiert, wie viele Kreise ihr mit der Schale einer Orange auslegen konntet.

Vergleicht mit den anderen Gruppen. Wie lautet die Formel für den Oberflächeninhalt einer Kugel in Abhängigkeit von r ?

① Fülle den Lückentext aus.

Wir haben herausgefunden, dass man mit den Orangenschalen insgesamt Kreise ausfüllen kann. Der Flächeninhalt eines Kreises kann mit folgender Formel berechnet werden:

$A_K =$ Damit beträgt die Formel für den Oberflächeninhalt einer Kugel: $A_O =$ $\cdot \pi r^2$.



INFO: Kugel

Mathematik Körper R 9



Oberflächeninhalt einer Kugel

Der Oberflächeninhalt einer Kugel berechnet sich wie folgt:

$$A_O = 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

Kugel \-
Oberfläche
berechnen



Beispiel

Ein offizieller Basketball hat einen Oberflächeninhalt von 1809,56 cm². Wie groß ist dann der Radius r?

$$O_{\text{Basketball}} = 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

Stelle zunächst nach dem Wert r^2 um.

$$r^2 =$$

Ziehe anschließend die Wurzel

$$r =$$

Setze die gegebenen Werte ein

$$r =$$

Antwort: Der Radius eines Basketballs beträgt also .



Schau dir auch unbedingt das Video zur Kugel vom DorFuchs an:

Kugel: Volumen und
Oberfläche (Mathe-Song)





INFO: Kugel

Mathematik Körper R 9

- ② In einem Baumarkt gibt es unterschiedlich große Deko-Kugeln aus verschiedenen Materialien.

a) Bei einer Kugel mit dem Radius $r = 30$ cm ist die untere Halbkugel geschliffen und poliert. Berechnen Sie die Oberfläche der unteren Halbkugel.

b) 1 cm³ Granit wiegt 2,8 g.

Ermitteln Sie rechnerisch das Gewicht einer Granitkugel mit dem Durchmesser $d = 44$ cm in Kilogramm.

c) Eine andere Deko-Kugel wird in einem mit Wasser gefüllten Zylinder aus Glas vollständig untergetaucht. Dieser Zylinder hat einen Durchmesser von $d = 15$ cm. Der Wasserstand ist nach dem Eintauchen um 5 cm höher. Berechnen Sie den Durchmesser dieser Deko-Kugel in cm.

